Chapitre VIII : Calculs de primitives et d'intégrales

I Existence d'une primitive

I.1 Définition d'une primitive

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition I.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $F : I \to \mathbb{K}$ est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 1 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une fonction F est une primitive de f si et seulement si $\mathrm{Re}\,(F)$ est une primitive de $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(F)$ est une primitive de $\mathrm{Im}\,(f)$. Donc pour déterminer une primitive de f, il (faut et) il suffit de trouver une primitive de $\mathrm{Re}\,(f)$ et une primitive de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exemple 2 :

1. $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Si $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Si $I \subseteq \mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition I.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I et si $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de g sur I, alors

$$\lambda F + \mu G \text{ est une primitive de } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 3 : Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$

Rappel-Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les primitives de la fonction nulle sur I sont les fonctions constantes sur I : soit $F : I \to \mathbb{K}$.

$$(F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I,\ F'(x) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition I.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

1. Si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f, alors pour tout $c \in \mathbb{K}$, la fonction $F + c$ est aussi une primitive de f.
2. Soient $F : I \to \mathbb{K}$ et $G : I \to \mathbb{K}$ deux primitives de f sur I. Alors

   $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Soient $a \in I$ et $A \in \mathbb{K}$. Si f admet une primitive sur I, alors il existe une unique primitive $F : I \to \mathbb{K}$ telle que

   $$F(a) = A.$$

Remarque 4 : Aucun de ces résultats n'assure l'existence d'une primitive mais donne des propriétés sur les primitives de f lorsque f admet au moins une primitive. L'existence d'une primitive n'est pas assurée pour toute fonction.

Exercice 5 : Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0; 2[$.

I.2 Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition I.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur I, noté $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ ou $f \in \mathscr{C}^1(I)$ si et seulement si

(i) f est une fonction dérivable sur I

(ii) sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple 6 : Puisqu'une fonction dérivable est continue, on en déduit que toutes les fonctions deux fois dérivables sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque 7 : La somme, le produit, la composition, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions $\mathscr{C}^1$ est encore une fonction $\mathscr{C}^1$.

I.3 Existence dans le cas continu

On commence par définir l'intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes (mais toujours de la variable réelle).

Définition I.5

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ une fonction **continue** sur $[a; b]$. On note $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$. Puisque f est continue, les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur $[a; b]$ et donc les intégrales $\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t$ existent. On définit alors l'intégrale de f sur $[a; b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le schéma logique général pour la construction théorique de primitives pour les fonctions continues est le suivant :

- On construit l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues (cf second semestre).
- On montre que l'intégrale d'une fonction continue est une primitive de cette fonction (cf second semestre).

Théorème I.6 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** sur I. Alors la fonction f admet des primitives sur I. Plus précisément, pour tout $A \in \mathbb{K}$, la fonction F définie sur I par

$$\begin{aligned} F : \quad & I \to \mathbb{K} \\ & x \mapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a) = A$. De plus, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Le fait que F soit une primitive de f sera démontré au second semestre. Cependant par définition de l'intégrale, on a bien $F(a) = A$ ce qui d'après la proposition I.3 garantit que F est **l'unique** primitive de f telle que $F(a) = A$. Enfin puisque F est une primitive de f sur I, F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Or f est continue sur I donc F' est continue sur I, c'est-à-dire F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Remarque 8 :

- Pour $x_0 \in I$, alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est LA primitive de f s'annulant en x_0.
- Pour désigner une primitive quelconque, il est courant de la noter $F : x \mapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire I.7

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a; b]$ et F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Corollaire I.8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a \in I$. Alors,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

II Propriétés de l'intégrale

Proposition II.1

Soient f et g deux fonctions continues sur I, $(a, b, c) \in I^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. L'intégrale vérifie les propriétés suivantes.

1. **Inversion des bornes** :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. **Linéarité** :
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
3. **La relation de Chasles** :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
4. **L'inégalité triangulaire** : si $a \leqslant b$,
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 9 : Pour utiliser l'inégalité triangulaire vous devez toujours vérifier et justifier que les bornes sont dans le bon sens : $a \leqslant b$.

Proposition II.2

Soient f et g deux fonctions continues sur I, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$**,** et $(a, b) \in I^2$. L'intégrale vérifie les propriétés suivantes.

1. **Positivité** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$ alors
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
2. **Séparation** : pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $a \neq b$,
$$\begin{cases} f \text{ est continue,} \\ f \geqslant 0 \text{ sur } [a; b], \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
3. **Croissance** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $\forall t \in [a; b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition II.3 (Intégration par parties)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors,

.....

Remarque 10 : Lorsque vous devrez appliquer une intégration par parties, écrire au brouillon quelle valeur vous prenez pour u' et quelle valeur pour v. En déduire ensuite au brouillon u et v'. Testez si cela fonctionne bien. Au propre : présentez d'abord vos fonctions u et v, puis justifier qu'elles sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et enfin écrivez les valeurs de u' et v'. Alors et alors seulement, vous pouvez appliquer la formule.

Exemple 11 : Calculer l'intégrale $\int_1^e \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire II.4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors

$$\forall x \in I,\ \int_a^x u'(t)v(t) = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 12 : Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition II.5 (Changement de variables)

Soient

(i) I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$,

(ii) $\varphi : I \to J$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(iii) $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J.

Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,

.....

Exemple 13 : Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin(t)$.

Exemple 14 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $y = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

Exemple 15 : Calculer les primitives de $g : x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

Exemple 16 : Calculer les primitives de $g : x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}$.

III Primitives usuelles et techniques de calcul

III.1 Primitives usuelles

$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq 1$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$		$u'u^\alpha$, $\alpha \neq 1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) + C$		$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + C$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + C$		$u'\,\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$		$u'\ln(u)$	$u\ln(u) - u + C$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$		$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$		$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + C$		$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u) + C$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$		$u'\tan(u)$	$-\ln(\lvert\cos(u)\rvert) + C$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x) + C$		$u'\,\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u) + C$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x) + C$		$u'\,\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u) + C$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + C$		$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + C$
$x \mapsto \frac{1}{a+x^2}$, $a > 0$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$		$\frac{u'}{a+u^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right) + C$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x) + C$		$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u) + C$

III.2 Autres techniques de calcul

L'objectif principal dans la recherche d'une primitive est transformer l'expression de la fonction pour se ramener à une fonction dont on connaît la primitive, par intégration par parties, changement de variables ou par calcul direct comme dans les exemples qui suivent.

Exemple 17 : Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a}$.

- Si $a = 0$, alors les primitives sont $x \mapsto -\frac{1}{x} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- Si $a > 0$, alors $\frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}$ donc les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, posons $\alpha = \sqrt{-a} > 0$. Alors, $\frac{1}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{(x-\alpha)(x+\alpha)} = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{x+\alpha}$, donc les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{2\alpha}\ln(\lvert x-\alpha\rvert) - \frac{1}{2\alpha}\ln(\lvert x+\alpha\rvert) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 18 : Primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$, $\alpha > 0$. On factorise par α^2 : $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}}$. Donc les primitives sont $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 19 :

1. Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{5}{4x^2+3}$.
2. Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{2}{x^2-1}$.
3. Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$.

Exemple 20 : Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$. On regarde Δ le discriminant de $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors il existe α et β dans $\mathbb{R}$ (les racines de P) distincts tels que $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ que l'on écrit $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$, les primitives sont alors $x \mapsto A\ln(\lvert x-\alpha\rvert) + B\ln(\lvert x-\beta\rvert) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\alpha)^2}$. Donc les primitives sont $x \mapsto \frac{-1}{a}\frac{1}{x-\alpha} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta < 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ tels que $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{a\beta^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$. En conséquence les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{a\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 21 : Primitive de $x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, avec le discriminant de ax^2+bx+c strictement négatif. On prend l'exemple $x \mapsto \frac{3x+2}{2x^2+x+1}$ mais la méthode est générale.

- Etape 1, faire apparaître de $\lambda\frac{u'}{u}$. La dérivée de $x \mapsto 2x^2+x+1$ est $x \mapsto 4x+1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x+2 = \frac{3}{4}(4x+1) - \frac{3}{4} + 2 = \frac{3}{4}(4x+1) + \frac{5}{4}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{3x+2}{2x^2+x+1} = \frac{3}{4}\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{5}{4}\frac{1}{2x^2+x+1},$$

avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 2x^2+x+1$.

- Etape 2, faire apparaitre du $\mu\frac{v'}{1+v^2}$. On sait que $x \mapsto \frac{3}{4}\ln(|u(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{3}{4}\frac{u'(x)}{u(x)}$. Il nous reste donc à intégrer le second terme. On se retrouve dans le cas de l'exemple précédent avec $\Delta < 0$. On factorise $2x^2+x+1$ de la façon suivante (on donne sa forme canonique) : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
2x^2+x+1 = 2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) \\
&= \frac{2\times 7}{16}\left(\left(\sqrt{\frac{16}{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1\right) \\
&= \frac{7}{8}\left(\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1\right) = \frac{7}{8}\left(v(x)^2+1\right),
\end{aligned}$$

avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right) = \frac{4x+1}{\sqrt{7}}$ et $v'(x) = \frac{4}{\sqrt{7}}$. Donc

$$\frac{5}{4}\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{5}{4}\frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{v'(x)}{1+v(x)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}\frac{v'(x)}{1+v(x)^2}.$$

Finalement les primitives sont :

$$x \mapsto \frac{3}{4}\ln(|u(x)|) + \frac{5\sqrt{7}}{14}\arctan(v(x)) + C = \frac{3}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{5\sqrt{7}}{14}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

III.3 Théorème de décomposition en éléments simples

Théorème III.1 (Décomposition en éléments simples)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ des réels ou des complexes **distincts**, $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes tels que

.....

Alors il existe E un polynôme et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}^p$ des réels ou complexes tels que

.....

Remarque 22 :

1. Le polynôme E n'apparait que si $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$ et s'appelle la partie entière. Il s'obtient en faisant la division euclidienne de P par Q : $P = EQ+R$ (cf second semestre, chapitre sur les polynômes) alors $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ et alors on se ramène toujours à décomposer une fraction avec $\deg(R) < \deg(Q)$.
2. Pour obtenir le coefficient α_1, par exemple, on commence par multiplier $f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)}$ par $(x-x_1)$. On a alors nécessairement une simplification avec le dénominateur : $(x-x_1)f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_2)\dots(x-x_p)}$. Une fois cette simplification faite, on évalue en x_1, on obtient alors d'un côté $\frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_p)}$ (à calculer) et de l'autre $(x_1-x_1)E(x) + \alpha_1 + \frac{\alpha_2(x_1-x_1)}{x_1-x_2} + \dots + \frac{\alpha_2(x_1-x_p)}{x_1-x_p} = \alpha_1$, ce qui nous permet donc de calculer α_1.

Exemple 23 : Calculons la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.
On observe que $\deg\left(X^2+2X+5\right) = 2 = \deg\left(X^2-3X+2\right)$. On commence donc par écrire que

$$X^2+2X+5 = \left(X^2-3X+2\right)\times 1 + 5X + 3.$$

Donc

$$F = 1 + \frac{5X+3}{X^2-3X+2}.$$

On observe que 2 et 1 sont racines de X^2-3X+2. Par conséquent,

$$\tilde{F} = \frac{5X+3}{X^2-3X+2} = \frac{5X+3}{(X-2)(X-1)}.$$

Donc par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\tilde{F} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-2}.$$

En évaluant $(X-1)\tilde{F}$ en $X=1$,

$$\frac{5+3}{1-2} = -8 = \alpha.$$

De même, en évaluant $(X-2)\tilde{F}$ en $X=2$,

$$\frac{5\times 2+3}{2-1} = 13 = \beta.$$

Conclusion,

$$F = 1+\tilde{F} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$

Exemple 24 : Calculer la décomposition en éléments simples de $f : x \mapsto \frac{3x-9}{x^2-2x-35}$ puis en déduire les primitives de f sur un intervalle à choisir.

Exemple 25 : Calculer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^3-2x^2-3x}$.

Le cas plus général - Hors programme
Soit $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Q(x) = a\left(x-x_1\right)^{n_1}\left(x-x_2\right)^{n_2}\dots\left(x-x_p\right)^{n_p}\left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{m_1}\left(x^2+\beta_2 x+\gamma_2\right)^{m_1}\dots\left(x^2+\beta_q x+\gamma_q\right)^{m_q},$$

où chaque polynôme $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ possède un discriminant strictement négatif $\Delta_i<0$.
Alors il est toujours possible d'écrire f de la façon suivante :

$$f(x) = E(x) + F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_p(x) + G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_q(x),$$

avec E un polynôme et pour tout i,



$$F_i(x) = \frac{a_{i,1}}{x-x_i} + \frac{a_{i,2}}{\left(x-x_i\right)^2} + \dots + \frac{a_{i,n_i}}{\left(x-x_i\right)^{n_i}}$$

$$G_i(x) = \frac{b_{i,1}x+c_{i,1}}{x^2+\beta_i x+\gamma_i} + \frac{b_{i,2}x+c_{i,2}}{\left(x^2+\beta_i x+\gamma_i\right)^2} + \dots + \frac{b_{i,m_i}x+c_{i,m_i}}{\left(x^2+\beta_i x+\gamma_i\right)^{m_i}}.$$

Exemple 26 : Il existe a, b, c, d, e, f, g, h tel que

$$f(x) = \frac{2x^4+3x^3+x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2(x-1)^3(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3} + \frac{ex+f}{x^2+x+1} + \frac{gx+h}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Exemple 27 : Calculer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+1}{2x^2-6x+4}$

IV Prochainement...
Analyse asymptotique - Définition de l'équivalence

Définition IV.1

- *Fonctions :* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$. On dit que f est **équivalente** à g en a, noté
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$$
si et seulement si
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- *Suites :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$$
si et seulement si
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 28 : Seule la suite/fonction nulle est équivalente à la suite/fonction nulle. Il est INTERDIT d'écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite constante égale à 0 et INTERDIT d'écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ si f n'est pas la fonction nulle.

Exemple 29 :

1. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ldots\ldots\ldots$,
2. $3^n + 2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ldots\ldots\ldots$,
3. $x^2 + x + 5 \underset{x\to+\infty}{\sim} \ldots\ldots\ldots$,
4. $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} \ldots\ldots\ldots$



CAUCHY Augustin-Louis *(Paris 1789 - Sceaux 1857) est un mathématicien français. Fuyant la terreur avec sa famille, Cauchy s'installa à Arcueil et y rencontra Laplace. Très brillant élève, il entre à l'âge de seize ans à l'Ecole Polytechnique. Ingénieur militaire il travailla aux fortifications du port de Cherbourg avant de revenir à Paris et, encouragé par Lagrange, obtint en 1816 un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'Ecole Polytechnique et au Collège de France. Il est élu la même année à l'Académie des sciences où il remplace Monge (évincé pour des raisons politiques). Légitimiste convaincu, Cauchy refusa de prêter allégeance à Louis-Philippe et s'exila en 1830. Il séjourna à Turin puis Prague. Dispensé du serment d'allégeance, il rentra en France en 1838 et retrouve son poste à Polytechnique où il enseigna jusqu'à sa mort. Son caractère agressif pour la défense de ses idées bigotes et légitimistes le mit en mauvais termes avec certains de ses collègues, parfois même avec ses anciens appuis.*
En tant que membre de l'Académie, il se devait de lire et de corriger des articles. Il lui sera vivement reproché d'avoir négligé les travaux d'Abel et de Galois, morts jeunes dans des conditions misérables mais dont les idées auront de grandes répercussions dans les mathématiques du vingtième siècle. L'oeuvre de Cauchy est considérable et ses travaux concernèrent tous les domaines des mathématiques, en particulier en algèbre linéaire et en équations différentielles. Il fournit également des bases mathématiques à certains domaines physiques. Son apport principal fut en analyse où il fut le premier à définir rigoureusement la notion de continuité et d'intégrale pour les fonctions continues. Dans ses travaux sur les équations différentielles, il est le premier à donner des preuves d'existence et d'unicité de solutions. Cauchy fut un mathématicien clé de son époque, à la jonction de la fin du dix-huitième siècle encore imprégné par la réalité physique et la seconde moitié du dix-neuvième siècle où l'on s'efforce d'élaborer une science rigoureuse qui prétend de plus en plus à se suffire à elle-même.

Deux mathématiciennes discutent à un bar sur la connaissance des mathématiques du commun des mortels. L'une prétend qu'un citoyen lambda ne possède pratiquement aucune connaissance en mathématiques et serait bien incapable de donner une primitive de x^2 par exemple. La seconde se veut plus optimiste et lui affirme qu'elles vivent dans une société de plus en plus éclairée où la culture mathématique, indisponible pour un esprit bien fait, est plus répandue qu'elle ne croit. Alors que la première mathématicienne s'absente, la seconde interpelle un serveur, lui glisse un billet et lui dit :
« - Lorsque mon amie vous posera une question, vous lui répondrez $\frac{1}{3}x^3$.
-Inter deuzix hocub ?
-Presque, ça ira, retenez-le bien. »
Le serveur s'éloigne en répétant « Aintère de hicsocub ». La première mathématicienne revient et la seconde lui propose alors pour vérifier ses dires de demander à un serveur s'il sait intégrer la fonction carrée. La première accepte, interpelle le serveur et lui demande alors :
« Pouvez-vous me donner la primitive de x^2, je vous prie ? »
Le serveur lui répond alors avec une prononciation impeccable :
« -Un tiers de x au cube. »
La mathématicienne, surprise, s'extasie alors sur l'érudition de notre serveur et le remercie chaleureusement. Le serveur s'en retourne alors à ses tâches et murmure en s'éloignant « plus une constante, naturellement... ».